Жусупова Динара Серикжановнаның 6D060100 - «Математика» мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындаған «Алгебралық теңдеулер жүйелерін шешуді параллельдеудің кейбір есептері» атты диссертациялық жұмысқа пікір

Аталған диссертациялық жұмыста сызықты және сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесін жуықтап шешу үрдісінің параллель есептеу әдістері құрастырылған. Келесі сызықты алгебралық жүйе үшін

$$Ax = f,$$

негізгі алынған нәтижелер келесідей:

Теорема 1. *Егер A матрицасы қайтымды (яғни A^{-1} бар) болса, онда келесі бағалаулар орындалады:*

$$|Ax_k - f|^2 = J(x_k) \leq \rho^k |f|^2$$

және

$$|x_k - \mathring{x}| \leq \|A^{-1}\| \rho^{\frac{k}{2}} |f|,$$

мұндағы

$$\rho = 1 - \left(\frac{1}{\|A^{*-1}\| \|A\|} \right)^2,$$

$x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k \omega_k$, $\omega_k = A^* (Ax_k - f)$ *және* $\varepsilon_k = -\frac{\langle Ax_k - f, A\omega_k \rangle}{|A\omega_k|^2}$ $k \geq 0$.

Бұл әдісті параллель есептеуде сызықты алгебра есептерінде көп пайдаланатын матрицаны векторға көбейтудің таспалы алгоритмі тиімді түрде қолданылады. Қолданбалы есептерде көп жағдайда нақты мәндерден гөрі жуық мәліметтер алынғандықтан, A матрицасының кері матрицасы жоқ немесе нашар шартталған болуы мүмкін. Бұл жағдай үшін келесі нәтижелер алынды:

Теорема 2. $\mathring{x}$ - $\inf_{x \in R^n} |Ax - f|^2 + \varepsilon |x|^2$ *есептің шешімі болып,* $\varepsilon \geq 0$ *және* $0 < \delta < \frac{2}{\|A^* A\| + \varepsilon}$ *сандары үшін*

$$x_j = \delta \sum_{k=0}^{j-1} [E - \delta(A^* A + \varepsilon E)]^k A^* f$$

тізбегі берілсе, онда

$$x_j - \mathring{x} = -[E - \delta(A^* A + \varepsilon E)]^j \mathring{x}$$

және $j \to +\infty$ *ұмтылған жағдайда* x_j *тізбегі* $\mathring{x}$ *векторына геометриялық прогрессияның жылдамдығымен жинақталады, ягни белгілі бір* $\rho = \max\{(1-\delta(s_{j_0}^2+\varepsilon)), (1-\delta(\|A^*A\|+\varepsilon))\} < 1$ *саны үшін келесі теңсіздік орындалады:*

$$|x_j - \mathring{x}| \le C \cdot \rho^j,$$

мұндағы C *-* δ *мен* ε *сандарынан тәуелді тұрақты константа.*

Теорема 3. *а)* $\mathring{x}(\varepsilon)$ *векторы* $\varepsilon > 0$ *санынан үзіліссіз тәуелді және* $\mathring{x}(\varepsilon) = (A^*A + \varepsilon E)^{-1}A^*f$ *теңдігі орындалады.*

ә) $j \to +\infty$ *ұмтылғанда* $x_j(\varepsilon)$ *тізбегінің шегі* $\varepsilon \ge 0$ *санынан үзіліссіз тәуелді.*

б) Егер $s_1 \ge s_2 \ge \ldots \ge s_{j_0} > 0, s_{j_0+1} = s_{j_0+2} = \ldots = 0$ *сандары* A^*A *матрицасының меншікті мәндері және* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *сәйкес ортонормаланған меншікті векторлары, ал* $\mathring{x}(\varepsilon)(\varepsilon > 0)$ - $\inf_{x\in R^n} |Ax - f|^2 + \varepsilon|x|^2$ *есептің шешімі болса, онда*

$$\begin{array}{lll} 1 \le k \le j_0 & \text{үшін} & x_{jk}(\varepsilon) - \mathring{x}_k(\varepsilon) = (1 - \delta(s_k^2 + \varepsilon))^j \mathring{x}_k(0), \\ j_0 + 1 \le k & \text{үшін} & x_{jk}(\varepsilon) = \mathring{x}_k(\varepsilon). \end{array}$$

Мұндағы $x_{jk}(\varepsilon) = \langle x_j(\varepsilon), e_k\rangle, \mathring{x}_k(\varepsilon) = \langle \mathring{x}(\varepsilon), e_k\rangle$.

Теорема 4. $\varepsilon \geqslant 0$ *және* x_j $(j = 1, 2, \ldots)$ *векторлар тізбегі берілсе, онда*

а) $\gamma > 0$ *мен* j *нөмірі* $(1 - \delta(\gamma + \varepsilon))^{2j} \leqslant \gamma$, *шартынан алынса, онда*

$$|Ax_j(\varepsilon) - f| \leqslant 2|f|\sqrt{\gamma} + \gamma|\mathring{x}(\varepsilon)| + |A\mathring{x}(\varepsilon) - f|$$

ә) Егер j *нөмірі*

$$(1 - \delta(\gamma + \varepsilon))^{2j} \leqslant \gamma^2,$$

шартты қанағаттандырса, онда

$$|A^*A\,(x_j(\varepsilon) - \mathring{x}(\varepsilon))|^2 \leqslant \gamma^2 \left[|A^*A\mathring{x}|^2 + |\mathring{x}|^2\right];$$

б) Егер j *нөмірі*

$$(1 - \delta(\gamma + \varepsilon))^{2j} \leqslant \frac{2}{5\,\|A^*\|}\gamma,$$

шартты қанағаттандырса, онда

$$|A^*A\,(x_j(\varepsilon) - \mathring{x}(\varepsilon))|^2 \leqslant 8\gamma\,|f|^2;$$

в) Егер $\varepsilon = 0$ үшін j нөмірі

$$(1-\delta\gamma)^{2j} \leqslant \frac{2}{5\,\|A^*\|}\gamma,$$

формуладан алынса, онда

$$\left|A^*A\left(x_j(0)-f\right)\right|^2 \leqslant 8\gamma\,|f|^2\,.$$

Сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі үшін ұсынылып отырған әдіс N -процессорлы жүйені пайдаланған кезде есептеуге жұмсалатын уақыт бір компьютерге қарағанда шамамен n есе аз болады.

Теорема 5. *Егер $u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n$ векторлар тізбегі H-тан алынып, келесі рекуррентті формулалармен анықталсын:*

$$u_0 = 0,\ u_{n+1} = u_n - \varepsilon_n\omega_n,$$

$$\omega_n = \frac{B^*_{u_n}\left(A(u_n)-f\right)}{\left|B^*_{u_n}\left(A(u_n)-f\right)\right|};\varepsilon_n = \sqrt{J_u}\frac{1}{4c^3(1+|f|)} < 1,$$

Онда $n \geq 0$ үшін

$$J_n \leq J_0\rho^n = |f|^2\rho^n \quad (n=0,1,2,\ldots) \quad \text{мұндағы} \quad \rho = 1-\frac{1}{C^4(1+|f|)} < 1$$

бағалаулар орындалады. Есептің шешімі болатын $\mathring{u}$ үшін келесі теңсіздіктер орындалады:

$$|\mathring{u}-u_n| \leq \sqrt{J_0}\frac{1}{4C^3(1+|f|)}\cdot\frac{\rho^n}{1-\sqrt{\rho}}$$

мұндағы $J_u = |A(u)-f|^2, \quad C = 1+\max\{C_1(2|f|),\ C_2(2|f|),\ C_3(2|f|)\}.$

Құрастырылған әдістердің параллель есептеу алгоритмдері толығымен жұмыста келтірілген. Ғылыми жұмыстың тақырыбы көкейкесті мәселелердің біріне жататындықтан, алынған ғылыми нәтижелердің қолданбалылық маңызы бар. Сызықты алгебра есептеулерде, сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйелерін шешуде пайдалануға болады. Диссертацияның авторы философия докторы (PhD) дәрежесіне лайық деп санаймын.

Ғылыми кеңесшісі:
ҚР ҰҒА академигі, ф.-м. ғ. д. КАДР БӨЛІМІ М. Өтелбаев